8.1.6 Vlastnosti posloupností I

Předpoklady: 020113, 020111, 080104

Opakování z funkcí:
Funkce $f(x)$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkce $f(x)$ se nazývá klesající, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Př. 1: S užitím definic rostoucí a klesající funkce zformuluj definici rostoucí a klesající posloupnosti. Využij symboliku používanou u posloupností.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r < a_s$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá klesající, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r > a_s$.

Pedagogická poznámka: První pokus o vyřešení prvního příkladu dopadne katastrofou. Studenti totiž do této chvíle nijak nepotřebovali vnímat, jaké rozdíly mezi značením funkcí a posloupností vlastně jsou a tak nemají šanci příklad vyřešit, protože si sami nerozmysleli, co je čím nahrazeno.
Řeším to tak, že nejprve všem vynadám a pak jim ukážu a vysvětlím následující tabulku a poté, co oni bez větších problémů příklad vyřeší, si ještě rejpnu, jak je všechno jednodušší, když člověk alespoň trochu ví, co dělá.

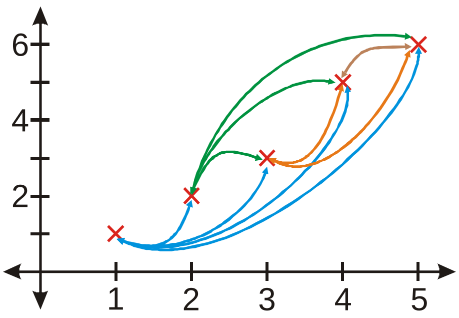
Porovnání značení u funkci a posloupností:

V obou případech jde o předpisy, které z něčeho vyrábějí čísla

vycházíme z libovolné podmnožiny *R*	vycházíme ze speciální podmnožiny *N*
$x \to y=f(x)$	$n \to a_n$
říkáme „z čísla *x* jsme získali hodnotu *y* (nebo $f(x)$)	z čísla *n* vznikl *n*-tý člen posloupnosti (a_n)

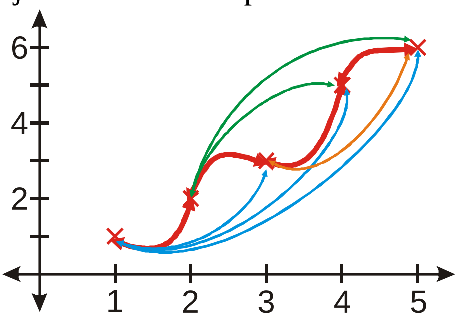
Obě definice nejsou ničím víc než přepsáním definic používaných pro funkce. Mají značné nevýhody. Například pokud budeme chtít dokázat, že je nějaká posloupnost rostoucí, musíme ověřit nerovnost pro každou dvojici, tedy každý člen musíme porovnat se všemi ostatními.

Př. 2: Nakresli graf posloupnosti $1;2;3;5;6$. Vyznač do grafu všechny dvojice, které musíme porovnat, abychom z definice dokázali, že tato posloupnost je rostoucí.



U posloupnosti, která má pět členů bychom měli porovnávat 10x.

Měli bychom využít faktu, že posloupnosti mají hodnoty uspořádané a dokazování vlastnosti zjednodušit. Kolik porovnání nám bude stačit?



Stačí pouze červená tučná porovnání, když víme, že platí $a_2 > a_1$ a $a_3 > a_2$, nemusíme porovnávat a_3 a a_1, protože víme, že bude platit i $a_3 > a_1$.

$\Rightarrow$ Posloupnost bude rostoucí, pokud bude každý člen větší než člen předchozí.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je rostoucí, právě když pro všechna** $n \in N$ **platí** $a_n < a_{n+1}$**.**

Věta je jasná, přesto ji musíme dokázat.

Důkaz: Věta má tvar ekvivalence:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow$ pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.

$\Rightarrow$ Musíme dokázat „šipku" oběma směry.

1. dokazujeme: $\Rightarrow$

Víme: pro všechna $r,s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r < a_s$ (funkce je rostoucí).

Chceme: pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.

Jednoduché: zvolíme $r = n$, $s = n+1$ a dosadíme: $a_r < a_s \Rightarrow a_n < a_{n+1}$.

2. dokazujeme: $\Leftarrow$

Víme: pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.

Chceme: pro všechna $r,s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r < a_s$ (funkce je rostoucí).

Zvolíme r a s libovolně tak, aby platilo $r < s$.

Víme, že pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_r < a_{r+1}$, ale i $a_{r+1} < a_{r+2}$ … a tak dále až dojdeme k nerovnosti $a_{r+k} < a_s$ a tedy i $a_r < a_s$.

Pedagogická poznámka: Je dobré, aby studenti pochopili, že v druhé části důkazu vlastně pomocí podmínky $a_n < a_{n+1}$ vytvoříme řetěz od a_r k a_s.

Př. 3: Zformuluj analogickou větu pro klesající posloupnosti.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, právě když pro všechna $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Př. 4: Rozhodni, které z následujících posloupností jsou rostoucí nebo klesající:

a) $\left([-2]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Ve všech případech nejdříve napíšeme několik členů posloupnosti a odhadneme, zda posloupnost může být rostoucí nebo klesající. Pokud bude mít posloupnost prvních několika členů jednu z těchto vlastností, pokusíme se vlastnost dokázat.

a) $\left([-2]^n\right)_{n=1}^{\infty}$

Členy posloupnosti: $-2; 4; -8; 16; -32; 64; ...$ $\Rightarrow$ určitě není ani rostoucí ani klesající.

b) $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$

Členy posloupnosti: $2; 5; 8; 11; 14; 17; ...$ $\Rightarrow$ zdá se, že jde o rostoucí posloupnost $\Rightarrow$ musíme dokázat $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$.

$a_n = 3n-1$, $a_{n+1} = 3(n+1)-1 = 3n+2$ dosadíme do nerovnosti: $3n-1 < 3n+2$

$-1 < 2$ platí pro všechna $n \in N$ $\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí.

c) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Členy posloupnosti: $\frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \frac{7}{6}; ...$ $\Rightarrow$ zdá se, že jde o klesající posloupnost $\Rightarrow$ musíme dokázat $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$.

$a_n = \frac{n+1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$ dosadíme do nerovnosti: $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$ $/\cdot n(n+1)$, pro $n \in N$ (násobíme kladnými čísly, nerovnost se nemění).

$(n+1)^2 > n(n+2)$

$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$

$1 > 0$ platí vždy, tedy i pro všechna $n \in N$ $\Rightarrow$ posloupnost je klesající.

Pedagogická poznámka: Bod b) počítám na tabuli, bod c) už dělají pouze studenti v lavicích.

Př. 5: Rozhodni, zda je posloupnost $a_1 = 4; a_{n+1} = a_n - 2; n \in N$ rostoucí nebo klesající.

Nemá cenu ani psát členy posloupnosti, posloupnost je klesající, což je vidět i po dosazení do nerovnosti: $a_{n+1} < a_n$.

$a_{n+1} = a_n - 2 < a_n$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě strašně jednoduchý. Jde jenom o to, jestli studenti dokáží změnit přístup a nebudou se snažit dosazovat do vzorce, který ve skutečnosti neznají.

Př. 6: Rozhodni, zda je posloupnost $\left([1-n]^2\right)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí nebo klesající.

Členy posloupnosti: $0;1;4;9;16;25;...$ $\Rightarrow$ zdá se, že jde o rostoucí posloupnost $\Rightarrow$ musíme dokázat $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, $a_n = (1-n)^2$, $a_{n+1} = (1-[n+1])^2 = (-n)^2 = n^2$

Dosadíme do nerovnosti: $(1-n)^2 < n^2$.

$1-2n+n^2 < n^2$
$1 < 2n$
$n > 0,5$, protože platí, že $n \in N$ nerovnost platí $\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí.

Př. 7: Najdi chybu v následujícím postupu:

Rozhodni, zda je posloupnost $\left(\frac{n}{n-9,5}\right)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí nebo klesající.

Členy posloupnosti: $-\frac{1}{8,5};-\frac{2}{7,5};-\frac{3}{6,5};-\frac{4}{5,5};-\frac{5}{4,5};-\frac{6}{3,5};...$ $\Rightarrow$ zdá se, že jde o klesající posloupnost $\Rightarrow$ musíme dokázat $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$.

$a_n = \frac{n}{n-9,5}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+1-9,5} = \frac{n+1}{n-8,5}$ dosadíme do nerovnosti:

$\frac{n}{n-9,5} > \frac{n+1}{n-8,5} \quad / \cdot (n-9,5)(n-8,5)$

$n(n-8,5) > (n+1)(n-9,5)$

$n^2 - 8,5n > n^2 - 9,5n + n - 9,5$

$0 > -9,5$ platí vždy $\Rightarrow$ posloupnost je klesající.

Odvození je chybné, protože další část posloupnosti vypadá takto:

$-\frac{1}{8,5};-\frac{2}{7,5};-\frac{3}{6,5};-\frac{4}{5,5};-\frac{5}{4,5};-\frac{6}{3,5};-\frac{7}{2,5};-\frac{8}{1,5};-\frac{9}{0,5};\frac{10}{0,5};....$

Chybou je vynásobení nerovnosti: $\frac{n}{n-9,5} > \frac{n+1}{n-8,5} \quad / \cdot (n-9,5)(n-8,5)$.

Výraz $(n-9,5)(n-8,5)$ je pro $n = -9$ záporný $\Rightarrow$ pro tuto hodnotu *n* bychom měli obrátit znaménko nerovnosti a důkaz by nám nevyšel (z výpisu vidíme, že pro hodnoty $n = 9$ a $n = 10$ neplatí nerovnosti $a_n > a_{n+1}$).

Př. 8: Petáková:
strana 66/cvičení 6 c) d) e) g) h)

Shrnutí: O tom, zda je posloupnost rostoucí nebo klesající, můžeme rozhodovat pomocí nerovnosti mezi a_n a a_{n+1}.